3D - ytor – Algebra – DPGraph

David Sjöstrand

$f(x, y, z) = 0$ och $g(x, y, z) = 0$ är ekvationerna för ytorna f respektive g.

Unionen av två ytor

$f(x, y, z) = 0$ och $g(x, y, z) = 0$ är ekvationerna för ytorna f respektive g.

$f(x, y, z)\cdot g(x, y, z) = 0$ är ekvationen för den yta, Y, som består av alla punkter, som ligger på f eller g.

Y är alltså unionen av f och g och betecknas $f \cup g$.

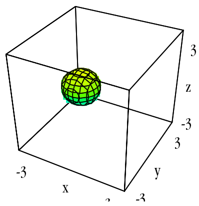
Bevis:

$(x,\ y,\ z) \in Y \Leftrightarrow f(x,\ y,\ z)\cdot g(x,y,z) \ = \ 0 \ \Leftrightarrow f(x,\ y,\ z) = 0$ eller $g(x,\ y,\ z) = 0 \Leftrightarrow$

$(x,\ y,\ z) \in f$ eller $(x,\ y,\ z) \in g$.

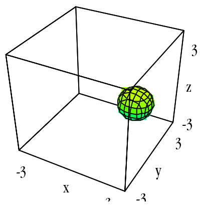
Exempel

$(x+1)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ satisfieras av alla punkter på en sfär med medelpunkt i (–1, 0, 0) 0ch radie = 1.



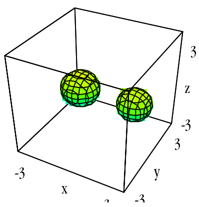
$(x-2)^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{4} = 0$ betyder en sfär

med medelpunkt i $(2,0,0)$ och radie = $\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\left((x+1)^2 + y^2 + z^2 - 1\right)\cdot\left((x-2)^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{4}\right) = 0$$

satisfieras av alla punkter, som ligger på någon av ovanstående 2 sfärer.

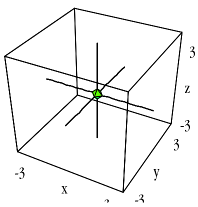


Exempel

$(x, y, z) \in z$-axeln $\Leftrightarrow$ $x = 0$ och $y = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0$.

$x^2 + y^2 = 0$ är således en ekvation för z-axeln.

På motsvarande sätt inses att $x^2 + z^2 = 0$ och $z^2 + y^2 = 0$ är ekvationer för y-axeln respektive x-axeln.



En ekvationen för de tre koordinataxlarna är därför $\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + z^2\right)\left(z^2 + y^2\right) = 0$ Den lilla diamanten i origo finns där p.g.a. avrundningsfel.

Skärningen mellan ytor

$f(x, y, z) = 0$ och $g(x, y, z) = 0$ är ekvationerna för ytorna f respektive g.

$f(x, y, z)^2 + g(x, y, z)^2 = 0$ är ekvationen för den yta, Y, som består av alla punkter, som ligger på f och g. Y är alltså *skärningen* mellan f och g och betecknas $f \cap g$.

Bevis:

$(x, y, z) \in Y \Leftrightarrow f(x, y, z)^2 + g(x,y,z)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0$ och $g(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow$

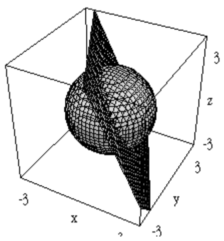
$(x, y, z) \in f$ och $(x, y, z) \in g$.

Exempel

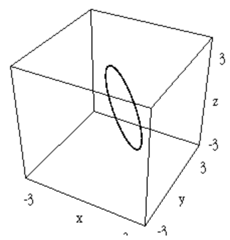
Vi plottar skärningen mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och planet $2x + y + z = 1$

En ekvation för skärningen är $\left(x^2 + y^2 + z^2 - 4\right)^2 + (2x + y + z - 1)^2 = 0$

Här nedan ser vi sfären och planet.



Här nedan ser vi skärningskurvan.



I praktiken måste vi plotta ytan

$\left(x^2 + y^2 + z^2 - 4\right)^2 + (2x + y + z - 1)^2 = a$, där a är

ett litet positivt tal. I vårt fall är $a = 0{,}001$

```
graph3d.resolution:=360
graph3d((x^2+y^2+z^2-4)^2+(2*x+y+z-1)^2=0.001)
```

Rotationsytor

a) Ytan $f\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$ erhålles om kurvan $f(x, y) = 0$, $y > 0$ roteras kring x-axeln.

b) Ytan $f\left(x, -\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$ erhålles om kurvan $f(x, y) = 0$, $y < 0$ roteras kring x-axeln.

Bevis

a)

1. Ytan $f\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$ sammanfaller med kurvan $f(x, y) = 0$, $y > 0$ ty $z = 0$ i

   $f\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$ ger $0 = f\left(x, \sqrt{y^2 + 0^2}\right) = f\left(x, \sqrt{y^2}\right) = f(x, y)$ ($\sqrt{y^2} = y$ om $y > 0$).

2. Betrakta skärningen mellan $f\left(x,\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$ och ett plan, $x = k$, vinkelrätt mot x-axeln.

Ekvationen $f(k, y) = 0$ har lösningarna $y = y_1, y = y_2, \ldots y = y_n$. n kan vara 0, vilket innebär att ekvationen saknar lösning.

Skärningen mellan $f\left(x,\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$ och $x = k$ betyder följaktligen ett antal cirklar

$\sqrt{y^2+z^2}=y_1, \sqrt{y^2+z^2}=y_2, \ldots \sqrt{y^2+z^2}=y_n$ i planet $x = k$.

Detta bevisar att $f\left(x,\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$ är den yta som bildas då $f(x,y)=0$, $y > 0$ roterar kring x-axeln.

b) Bevisas analogt med a) betänk dock att $\sqrt{y^2}=-y$ om $y < 0$.

Det vi sagt ovan om unionen av två ytor ger oss nu

c) Ytan $f\left(x,\sqrt{y^2+z^2}\right)\cdot f\left(x,-\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$ erhålles om kurvan $f(x,y)=0$ roteras kring x-axeln.

Exempel

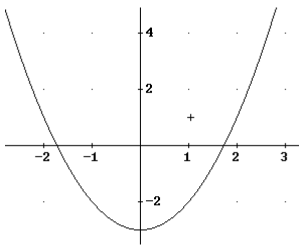
Vi plottar den yta som uppkommer då kurvan

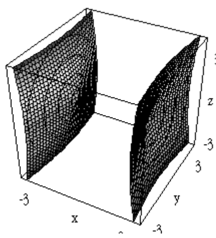
a) $y = x^2 - 3$, $y > 0$

b) $y = x^2 - 3$, $-y > 0$

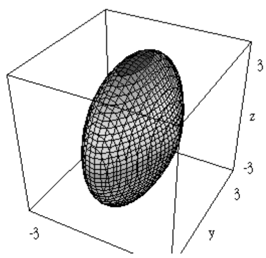
c) $y = x^2 - 3$

roterar kring x-axeln.

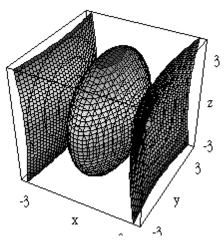




$\sqrt{y^2+z^2}-x^2+3=0$



$-\sqrt{y^2+z^2}-x^2+3=0$



$\left(\sqrt{y^2+z^2}-x^2+3\right)\left(-\sqrt{y^2+z^2}-x^2+3\right)=0$